

## Б И Л Е Т Ы

к экзамену по математическому анализу за второй семестр  
для студентов первого курса второго потока

2011-2012 учебный год

Лектор профессор В.А.Зорич

**1.** Интеграл Римана на отрезке. Нижние и верхние суммы, их геометрический смысл, поведение при измельчении разбиения и взаимные оценки. Теорема Дарбу, верхний и нижний интегралы Дарбу и критерий интегрируемости по Риману вещественнозначной функции на отрезке (в терминах сумм колебаний). Примеры классов интегрируемых функций.

**2.** Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману (формулировка). Множества меры нуль, их общие свойства, примеры. Пространство интегрируемых функций и допустимые операции над интегрируемыми функциями.

**3.** Линейность, аддитивность и общая оценка интеграла.

**4.** Оценки интеграла от вещественнозначной функции. Теорема о среднем (первая).

**5.** Интеграл с переменным верхним пределом, его свойства. Существование первообразной у непрерывной функции. Обобщенная первообразная и ее общий вид.

**6.** Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в интеграле.

**7.** Интегрирование по частям в определенном интеграле. Формула Тейлора с интегральным остатком. Вторая теорема о среднем.

**8.** Аддитивная функция ориентированного промежутка и интеграл. Общая схема появления интеграла в приложениях, примеры: длина пути (и ее независимость от параметризации), площадь криволинейной трапеции, объем тела вращения, работа, энергия.

**9.** Интеграл Римана-Стилтьеса. Условия сведения к интегралу Римана. Дельта-функция Дирака и понятие обобщенной функции. Дифференцирование обобщенных функций и производная функции Хевисайда.

**10.** Понятие несобственного интеграла. Канонические интегралы. Критерий Коши и теорема сравнения для исследования сходимости несобственного интеграла. Интегральный признак сходимости ряда.

**11.** Метрическое пространство, примеры. Открытые и замкнутые подмножества. Окрестность точки. Индуцированная метрика, подпространство. Топологическое пространство. Окрестность точки, отделимость (аксиома Хаусдорфа). Топология, индуцируемая на подмножествах. Замыкание множества и описание относительно замкнутых подмножеств.

**12.** Компакт, его абсолютность. Замкнутость компакта и компактность замкнутого подмножества компакта. Вложенные компакты. Метрические компакты,  $\varepsilon$ -сеть. Критерий метрического компакта и его конкретизация в пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

**13.** Полное метрическое пространство. Полнота  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{C}^n$  и пространства  $C[a, b]$  непрерывных функций относительно равномерной сходимости.

**14.** Критерий непрерывности отображения топологических пространств. Сохранение компактности и связности при непрерывном отображении. Классические теоремы об ограниченности, максимуме и промежуточном значении для непрерывных функций. Равномерная непрерывность на метрическом компакте.

**15.** Норма (длина, модуль) вектора в векторном пространстве; важнейшие примеры. Пространство  $L(X, Y)$  линейных непрерывных операторов и норма в нем. Непрерывность линейного оператора и конечность его нормы.

**16.** Дифференцируемость функции в точке. Дифференциал, его область определения и область значений. Координатная запись дифференциала отображения  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Соотношения между дифференцируемостью, непрерывностью и наличием частных производных.

**17.** Дифференцирование композиции функций и обратной функции. Координатная запись полученных законов применительно к различным случаям отображений  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**18.** Производная по вектору и градиент. Геометрические и физические примеры использования градиента (уровни функций, градиентный спуск, касательная плоскость; потенциальные поля; уравнение Эйлера динамики идеальной жидкости, закон Бернулли, работа крыла).

**19.** Теорема о конечном приращении. Ее геометрический и физический смысл. Примеры приложений (достаточное условие дифференцируемости в терминах частных производных; условие постоянства функции в области).

**20.** Высшие производные и их симметричность.

**21.** Формула Тейлора.

**22.** Экстремумы функций (необходимые и достаточные условия внутреннего экстремума).

**23.** Сжимающие отображения. Принцип Пикара-Банаха неподвижной точки.

**24.** Теорема о неявной функции.

**25.** Теорема об обратной функции. Криволинейные координаты и выпрямления. Гладкая поверхность размерности  $k$  в  $\mathbb{R}^n$  и касательная плоскость к ней. Способы задания поверхности и соответствующие им уравнения касательного пространства.

**26.** Теорема о ранге и зависимость функций.

**27.** Разложение диффеоморфизма в композицию простейших.

**28.** Условный экстремум (необходимый признак). Геометрическая, алгебраическая и физическая интерпретации метода Лагранжа.

**29.** Достаточный признак условного экстремума.